

DANG 1: Biến đổi các biểu thức chứa căn

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ và $Q = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 49$.
- 2) Rút gọn biểu thức Q.
- 3) Cho $M = P.Q$. Tìm các giá trị nguyên của x thỏa mãn $|M| > M$.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$)

- 1) Tính A khi $x = \frac{1}{9}$
- 2) Rút gọn B
- 3) So sánh B : A với 2

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

- 1) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$, tính giá trị biểu thức A.
- 2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$
- 3) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Bài 4 Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$
- b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$
- c) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

DANG 2: Giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bài 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 6 m và diện tích bằng 112 m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 2: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích là 192 m². Nếu tăng chiều rộng thêm 4m và giảm chiều dài đi 8m thì diện tích của mảnh đất không thay đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 3: Một tam giác vuông có cạnh huyền là 10 m và hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2m. tính các cạnh góc vuông của tam giác đó.

Bài 4: Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 150 km. Do vận tốc của ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc của ô tô thứ hai là 10 km/h nên ô tô thứ nhất đến sớm hơn ô tô thứ hai 30 phút. Tính vận tốc mỗi ô tô.

Bài 5: khoảng cách giữa 2 bến sông A và B là 30km. Một ca nô đi từ A đến B, nghỉ 40 phút ở B, rồi lại trở về A. thời gian kể từ lúc đi đến lúc trở về A là 6giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc dòng nước là 3km/h

Bài 6. Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2h với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Bài 7. Một tổ sản xuất dự định làm 60 sản phẩm trong một thời gian nhất định, sau khi làm được 30 sản phẩm thì họ dừng lại nghỉ 30 phút. Do đó để hoàn thành công việc đúng thời

hạn tổ sản xuất đó đã phải tăng năng suất lên 2 sản phẩm/giờ. Tính năng suất ban đầu của tổ sản xuất đó?

Bài 8: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể ?

DANG 3: Hệ phương trình

Bài 1. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

- 1) Giải hệ phương trình với $m = 1$. 2) Tìm m để hệ vô nghiệm.

Bài 2. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$$

- 1) Giải hệ phương trình khi $m = 1$. 2) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: $x - y = 2$.
3) Chứng minh rằng khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Bài 3. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m - 1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất mà $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

DANG 4: Quan hệ giữa (P) và (d)

Bài 1. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

- 1) Tìm các điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt bằng -1 và 2 .
2) Viết phương trình đường thẳng AB.
3) Viết phương trình đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 2. Cho hàm số: $y = ax^2$ có đồ thị (P) và hàm số: $y = mx + 2m + 1$ có đồ thị (d).

- 1) Chứng minh (d) luôn đi qua một điểm M cố định.
2) Tìm a để (P) đi qua điểm cố định đó.
3) Viết phương trình đường thẳng qua M và tiếp xúc với Parabol (P) tại M

Bài 3. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = 2x - \frac{3}{2}$

- 1) Vẽ (d) và (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.
2) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (d) và (P). Tính chu vi ΔAOB .
3) Cho đường thẳng (d_1) có pt: $y = nx + 1$. Xác định n để đường thẳng (d_1) cắt (P) tại 2 điểm nằm về một phía của trục Oy.

Bài 4. Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$

- 1) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là k và đi qua $M(1,5; -1)$.
2) Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) tiếp xúc nhau.
3) Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt .

Bài 5. Cho hàm số: (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và (d): $y = \frac{1}{2}x + n$.

- 1) Cho $n = 1$:
a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
b) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d).
c) Tính diện tích ΔAOB :
2) Tìm n để (P) tiếp xúc với (d).
3) Tìm n để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung.

Bài 6. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + m + 1$.

- 1) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B .
- 2) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B . Tìm m để $|x_1 - x_2| = 2$.
- 3) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm cùng bên trái của trục tung.

Bài 7. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol (P) , đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 + x_2$ mà $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 8. Cho hàm số: $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P) , đường thẳng $d: y = -mx - m + 1$. Tìm m để d cắt parabol (P) tại A và B phân biệt với $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ mà $(y_1 + y_2)$ nhỏ nhất.

DANG 5: Phương trình bậc 2:

Bài 1. Cho pt: $x^2 - 2(k + 3)x + 2k - 1 = 0$, k là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $k = \frac{1}{2}$
- 2) Tìm k để phương trình có một nghiệm là 3, tìm nghiệm còn lại?
- 3) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1; x_2$ với mọi k .
- 4) CMR giữa tổng và tích các nghiệm có một sự liên hệ không phụ thuộc k ?
- 5) Tìm k để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{3}{x_1 x_2} = 2$
- 6) Tìm k để tổng bình phương các nghiệm có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. Cho pt: $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$, m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $m = -5$
- 2) CMR phương trình luôn có nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m .
- 3) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- 4) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.
- 5) CMR biểu thức $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc m .
- 6) Tính giá trị của biểu thức $x_1 - x_2$.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$, m là tham số.

- 1) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m .
- 2) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để $B = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$
- 3) Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào m .

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 1 = 0$, m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$

Bài 5. Cho phương trình: $x^4 - 2x^2 + m - 2 = 0$, m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $m = -1$;
- 2) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

DANG 6: HÌNH HỌC

• Dạng bài tổng hợp:

Bài 1. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O) . Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP ($MN < MP$) đến (O) . sao cho tia MP nằm giữa tia MA và MO . Gọi K là trung điểm của NP .

- 1) Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh tia KM là phân giác của góc AKB .
- 3) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $AQ // NP$.
- 4) Gọi H là giao điểm của AB và MO . Chứng minh rằng: $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP$.
- 5) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

- 6) Gọi E là giao điểm của AB và KO . Chứng minh rằng: $AB^2 = 4.HE.HF$. (F là giao điểm của AB và NP).
- 7) Chứng minh rằng $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng $OK.OE$ không đổi.
- 8) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB .
- 9) Chứng minh hai góc NHA và PHA bằng nhau.
- 10) Chứng minh rằng: KE là phân giác ngoài của góc AKB . Từ đó suy ra: $AE.BF = AF.BE$.
- 11) Nếu $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB .

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Điểm E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Hạ $CH \perp AE$ tại H ; CH cắt BE tại M . Gọi I là trung điểm của BC .

- 1) Chứng minh bốn điểm A, I, H, C thuộc một đường tròn;
- 2) Chứng minh khi E chuyển động trên cung lớn BC thì tích $AD.AE$ không đổi;
- 3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BED tiếp xúc với AB ;
- 4) Tìm vị trí của E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm đoạn OB . Dây CD vuông góc với AB tại M . Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K . Nối BE cắt CD tại H .

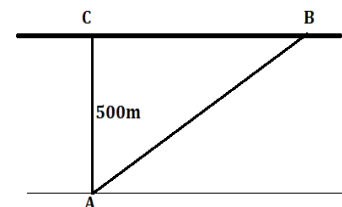
- 1) Chứng minh 4 điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn;
- 2) Chứng minh $AE.AK$ không đổi;
- 3) Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC ;
- 4) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm E chuyển động trên cung lớn CD .

Bài 4. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Điểm M thuộc nửa đường tròn. Gọi H là điểm chính giữa cung AM . Tia BH cắt AM tại I . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A cắt BH tại K . Nối AH cắt BM tại E .

- 1) Chứng minh tam giác BAE là tam giác cân. Chứng minh $KH.KB = KE^2$;
- 2) Đường tròn tâm B , bán kính BA cắt AM tại N . Chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp;
- 3) Tìm vị trí của M để $MKA = 90^\circ$.

Các bài toán thực tế:

Bài 1: Khúc sông rộng 500m, nước chảy xiết. Một con đò xuất phát từ bến A đi sang bờ bên kia. Do bị nước đẩy nên con đò đi theo đường AB . Biết $CAB = 60^\circ$, tính quãng đường AB .

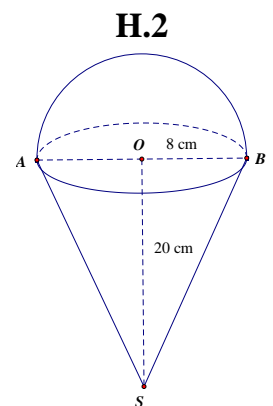


Bài 2: Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5cm, chiều cao là 6cm. Một hình cầu có thể tích bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ nói trên. Hãy tính bán kính của hình cầu đó.

Bài 3: Người ta gắn một hình nón (**H.2**) có bán kính đáy $R = 8\text{cm}$, độ dài đường cao $h = 20\text{cm}$ vào một nửa hình cầu có bán kính bằng bán kính hình nón (theo hình bên dưới). Tính giá trị gần đúng thể tích của hình tạo thành (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 4: Một hình nón có đường kính đường tròn đáy 10 cm, thể tích khối nón là $100\pi\text{cm}^3$. Tính chiều cao của hình nón.

Bài 5: Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi\text{cm}^2$ và diện tích đáy là $4\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.



Bài 6: Một cốc nước có dạng hình trụ có đường kính đáy bằng 6 cm, chiều cao 12cm và chứa một lượng nước cao 10cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có đường kính bằng 2cm vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?